Objectif :
Définir, décrire et calculer la vitesse ou l'accélération d'un point d'un solide.

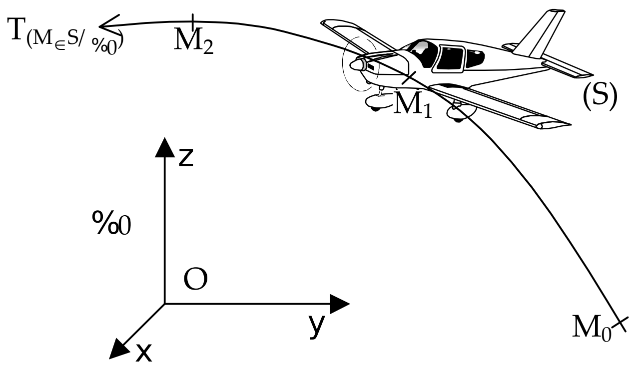
CINEMATIQUE C2

Vitesse et accélération

1. *Vitesse*

1.1. *Notion de vitesse*

Soit (S) un solide en mouvement dans un repère $\%_0$.
Soit M un point appartenant au solide (S), de coordonnées x(t), y(t) et z(t) à l'instant t.



Soit T(M∈S/$\%_0$) la trajectoire de M.

Sur cette trajectoire, choisissons par convention :

- une origine M_0 ;
- un sens positif ;
- une unité de longueur.

On relève, aux instants t_0, t_1, t_2, les positions du point M appartenant à S dans le repère $\%_0$.

Instants	t_0	t_1	t_2
Position sur T(M∈S/$\%_0$)	M_0	M_1	M_2
Abscisse curviligne s = f(t)	$s_0 = 0$	$s_1 = M_0M_1$	$s_2 = M_0M_2$

$\overline{S}$ = arc M_0M = valeur algébrique, à l'instant t, de l'arc orienté M_0M

1.2. *Vitesse algébrique moyenne*

Entre t_1 et t_2 :

$$V(t_1 \rightarrow t_2)_{moy} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

1.3. *Vitesse algébrique instantanée*

Si t_2 est très proche de t_1, alors Δt devient infiniment petit.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$ (*dérivée de l'abscisse curviligne*)

1.4. *Vecteur vitesse instantanée*

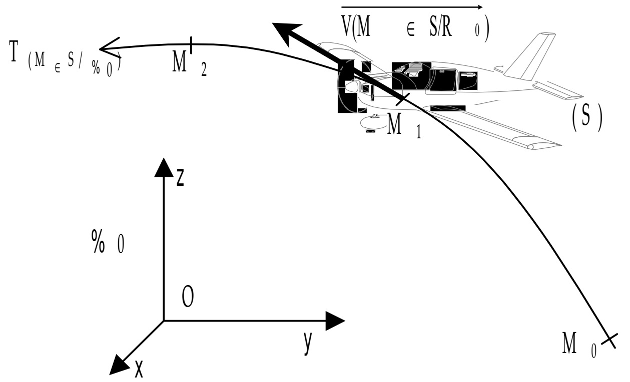
Le vecteur vitesse du point M dans son mouvement par rapport au repère fixe $\%_0$, est égal à la dérivée vectorielle (par rapport au temps) du vecteur position, dans le repère $\%_0$.

$$\overrightarrow{V(M \in S/R_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{V(M \in S/R_0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re_0}$$

Le vecteur $\overrightarrow{V(M \in S/R_0)}$ est tel que :

- son origine est confondue avec la position de M à l'instant t ;
- il est toujours tangent en M à la trajectoire $T(M \in S/\%_0)$;
- il est orienté dans le sens du mouvement ;
- sa norme est $\left\| \overrightarrow{V(M \in S/R_0)} \right\| = |v| = \left| \dfrac{ds}{dt} \right|$;
- unité : mètre par seconde, ou m/s.



Autre expression possible :

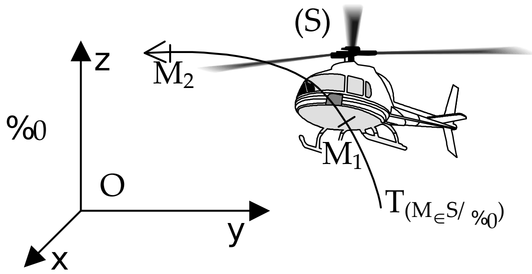
$$\text{Si \_OM} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{\%_0} \quad \text{Alors } \overrightarrow{V(M \in S/R_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{\%_0}$$

2. *Accélération*

2.1. *Accélération tangentielle moyenne*

Si le point M se situe en M_1 à l'instant t_1 et qu'il possède une vitesse instantanée v_1 ; s'il passe à l'instant t_2 en M_2 à la vitesse v_2, son accélération tangentielle moyenne entre t_1 et t_2 vaut :

$$\boxed{a_t(t)_{moy} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$



L'accélération peut aussi être notée $\Gamma(M \in S/\%_0)$ ou $\gamma\ (M \in S/\%_0)$.

2.2. *Accélération tangentielle instantanée*

A l'instant t quelconque, elle correspond à la limite du rapport $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ lorsque $\Delta t \to 0$.

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} \ ; \quad \text{or } v(t) = \frac{ds}{dt} \ ; \quad \text{d'où} \quad \boxed{a_t(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = s''(t)}$$

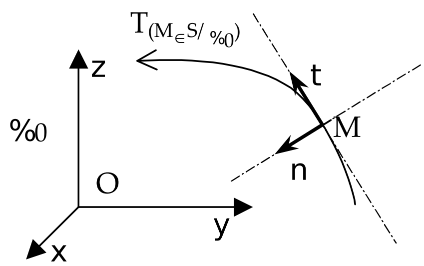
2.3. *Vecteur accélération*

$$\_a(M/\%_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{V(M/\Re_0)}}{dt} \right)_{\Re_0} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\Re_0}$$

Composantes tangentielles et normales de l'accélération :

Soient :

- n un vecteur unitaire normal en M à la trajectoire $T(M \in S/\%_0)$, orienté vers l'intérieur de la courbure ;
- t un vecteur unitaire tangent en M à $T(M \in S/\%_0)$, orienté comme la trajectoire.



Dans cette base (n,t), l'accélération peut s'écrire :

$$\boxed{\_a(M/\%_0) = a_n \times n + a_t \times t}$$

avec :

- a_n = accélération normale = $\dfrac{v^2}{R}$ (R représente le rayon de courbure)
- a_t = accélération tangentielle = $\dfrac{dv}{dt}$

Autre expression possible :

$$\text{Si } \overrightarrow{V(M \in S/R_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{\%_0} \quad \text{Alors } \overrightarrow{a(M \in S/R_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}_{\%_0}$$

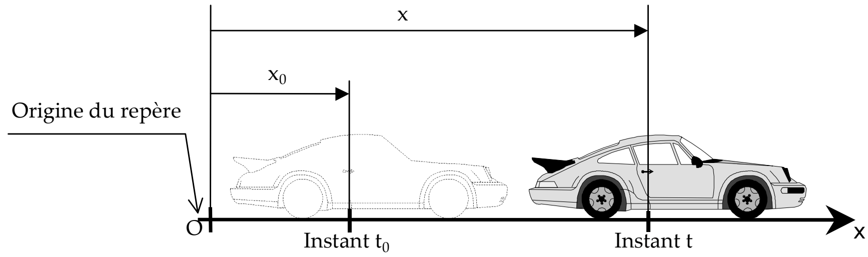
3. *Cas du mouvement de translation rectiligne uniforme*

3.1. *Définition*

C'est le mouvement le plus simple, sans accélération (a=0) et avec une vitesse constante au cours du temps.
Il est noté M.T.R.U.

3.2. *Equations de mouvement*

Soient :
t_0 : instant initial, $t_0 = 0$;
x_0 : le déplacement initial, à $t=t_0$;
v_0 : la vitesse initiale ;
x : le déplacement à l'instant t.

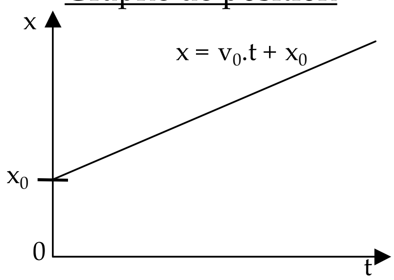


Equations horaires

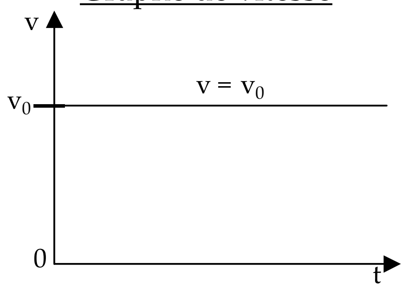
$$\boxed{\begin{array}{l} a = 0 \\ v = v_0 = \text{constante} \\ x = v_0.(t-t_0) + x_0 \end{array}}$$

x_0 et v_0 sont les ***conditions initiales*** du mouvement.

Graphe de position



Graphe de vitesse



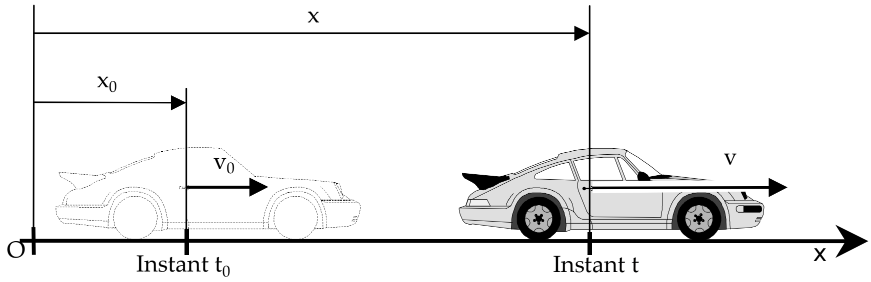
4. *Cas du mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré*

4.1. *Définition*

Il sert de modèle à de nombreuses études simplifiées. Pour ces mouvements, accélérés (a>0) ou décélérés (a<0), l'accélération reste constante au cours du temps.
Il est noté M.T.R.U.V.

4.2. *Equations du mouvement*

Soient :
t_0 : instant initial, $t_0 = 0$;
x_0 : le déplacement initial, à $t=t_0$;
a_0 : l'accélération initiale ;
v_0 : la vitesse initiale ;
x : le déplacement à l'instant t.

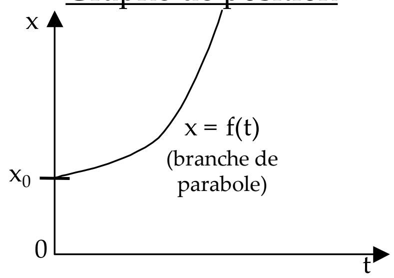


Equations horaires

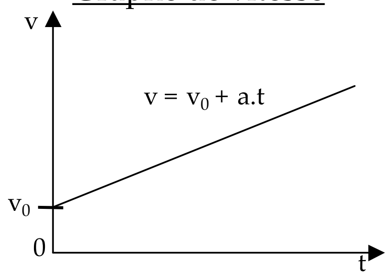
$$a = a_0 = \text{constante}$$
$$v = a.(t-t_0) + v_0$$
$$x = \frac{1}{2}.a.(t-t_0)^2 + v_0.(t-t_0) + x_0$$

x_0, v_0 et a_0 sont les ***conditions initiales*** du mouvement.

Graphe de position



Graphe de vitesse

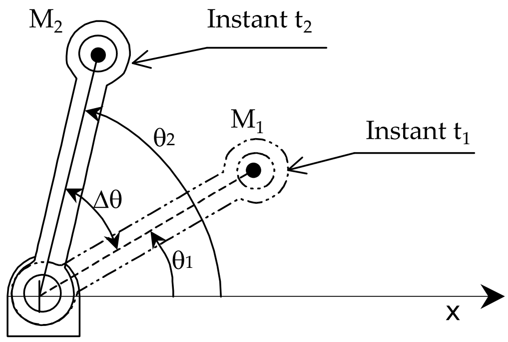


5. *Mouvement de rotation : généralités*

5.1. *Rotation d'un solide*

La rotation d'un solide est définie par son mouvement angulaire (tous les points de ce solide ont même vitesse angulaire).

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$$



5.2. *Vitesse angulaire, ou vitesse de rotation ω*

Vitesse angulaire moyenne : $$\omega_{moy} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

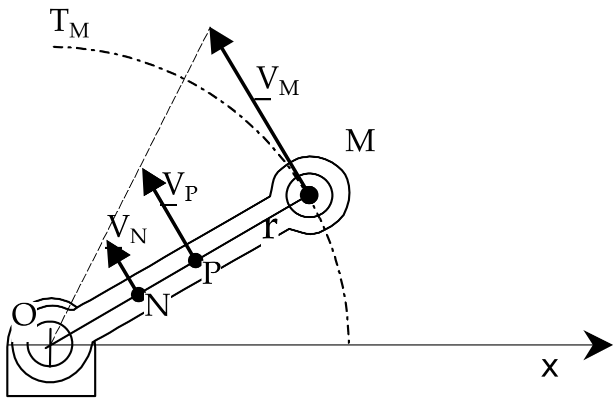
Vitesse angulaire instantanée : $$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta' = \dot{\theta}$$

Remarque 1 :
1 tour = 2π radian = 360°
Remarque 2 :
Si N est la vitesse de rotation en tour/min, alors : $\omega = \frac{\pi N}{30}$

5.3. *Accélération angulaire α*

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \omega' = \dot{\omega} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta'' = \ddot{\theta}$$

5.4. *Vitesse d'un point*



$$V_M = \omega.OM = \omega.r$$

Remarque : puisque ω a même valeur pour tous les points du solide, la vitesse linéaire $V(M \in S/R_0)$ varie linéairement avec la distance r à l'axe de rotation.

5.5. *Accélération*

$a_M = a_n + a_t$

$$a_t = \alpha.r = \alpha.OM$$
$$a_n = \omega^2.r = \frac{V_M^2}{r} = \omega.V_M$$

6. *Cas du mouvement de rotation uniforme*

6.1. *Définition*

L'accélération angulaire α est nulle. Ce mouvement est noté M.R.U.

6.2. *Equations horaires de mouvement*

Les équations horaires de mouvement sont :

$$\alpha = \theta'' = 0$$
$$\omega = \omega_0 = \text{constante}$$
$$\theta = \omega.(t-t_0) + \theta_0$$

ω_0 et θ_0 sont les ***conditions initiales*** du mouvement.

7. *Mouvement de rotation uniformément varié*

7.1. *Définition*

L'accélération angulaire α est constante. Ce mouvement est noté M.R.U.V.

7.2. *Equations horaires de mouvement*

Les équations horaires de mouvement sont :

$$\alpha = \text{constante}$$
$$\omega = \alpha.(t-t_0) + \omega_0$$
$$\theta = \frac{1}{2}.\alpha.(t-t_0)^2 + \omega_0.(t-t_0) + \theta_0$$

ω_0 et θ_0 sont les ***conditions initiales*** du mouvement.

Remarque :

- Si α>0, il y a accélération du mouvement.
- Si α<0, il y a décélération du mouvement (ou freinage).